Universidade Federal Fluminense - GMA

VE1 - Cálculo 2B - Turma J1 - Prof. Zhou Cong

04 de Outubro de 2018

Nome Completo: ____

Instruções:

1. Não é permitido o uso de equipamentos eletrônicos, consulta ou comunicar-se com outras pessoas, além do aplicador da prova. O não cumprimento dessas regras resultará no anulamento da prova. (**Desligue o celular e coloque-lo na mochila!**)
2. Respostas sem justificativas ou que não incluam os cálculos corretos e necessários não serão consideradas na correção. Enumerem as páginas e escrevam o nome na folha da prova.
3. Durante a prova é proibido sair da sala e o consumo de comidas.
4. A duração da prova é de **1 hora e 40 minutos**, a prova só pode ser entregue após 40min do início.
5. As dicas e as sugestões são somente para ajudar na resolução da questão, elas não substituem os passos na resolução da questão. Você precisa argumentar e escrever na prova o seu raciocínio me mostrando que entendeu a matéria.

Questão 1 (1,6 pts)**.** Descreva e esboce o maior domínio possível para que as expressões abaixo tornem funções:

(a) $f(x,y) = \dfrac{\ln(x^2 - y^2 - 1)}{\sqrt{4 - (x^2 + y^2)}}$. (b) $g(x,y) = \arccos\left(\dfrac{x^2 + 4y^2 - 17}{8}\right)$.

Dica para o item (b): O domínio da função arccos é o intervalo $[-1, 1]$.

Questão 2 (1,0 pts)**.** Verifique a existência do limite abaixo. Se existir, encontre o valor do limite:

$$\lim_{(x,y,z)\to(1,2,3)} \frac{\operatorname{sen}^2(xyz - 6x)}{x^2(yz - 6)^2}.$$

Dica: Encontre as funções $f : D_1 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : D_2 \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tais que a expressão acima dentro limite fica na forma $f\big(g(x,y,z)\big)$. Obtenha o valor $u_0 := \lim_{(x,y,z)\to(1,2,3)} g(x,y,z)$ e use a propriedade de que:

$$\lim_{(x,y,z)\to(1,2,3)} f\big(g(x,y,z)\big) = \lim_{u\to u_0} f(u)$$

para verificar a existência do limite acima e encontrar o seu valor.

Questão 3 (3,0 pts)**.** Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida pela expressão:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2(\operatorname{sen} x)xy}{x^2 + y^2} + e^x(y+1)\,, & (x,y) \neq (0,0). \\ 1\,, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) (1,0 ponto) Mostre que a função f é contínua no ponto $(0,0)$.

(b) (1,0 ponto) Calcule o vetor gradiente $\nabla f(0,0)$ da função f no ponto $(0,0)$.

(c) (1,0 ponto) Mostrar que f não é diferenciável no ponto $(0,0)$.

Sugestão: Para não complicar as contas, separe a função f em soma de duas funções $f = f_1 + f_2$, com:

$$f_1(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2(\operatorname{sen} x)xy}{x^2 + y^2}\,, & (x,y) \neq (0,0). \\ 0\,, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

No item (a) mostre que f_1 e f_2 são contínuas em $(0,0)$. No item (b), calcule $\nabla f_1(0,0)$ e $\nabla f_2(0,0)$, use a propriedade $\nabla f_1 + \nabla f_2 = \nabla f$.

Dica para o item (a): Separe a função $f_1 = g_1 \cdot g_2$ num produto de funções. Mostre que g_1 é uma função limitada e mostre que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g_2(x,y) = 0$. Depois aplique o Teorema de Anulamento.

Dica para o item (c): Tente mostrar que f_1 não é diferenciável em $(0,0)$.

Questão 4 (2,4 pts + 1,5 bônus)**.** Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida pela expressão:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3y}{x^6+y^2}, & (x,y) \neq (0,0). \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Escolha **somente um** dos items (a1) ou (a2) abaixo para fazer:

  (a1) (1,6 pts). Determine e esboçe o conjunto de nível 1 e 0 da função f.

  (a2) (1,6 pts + 1,5 bônus). Determine a expressão geral de um conjunto de nível k da função f e esboçe esses conjuntos. Separe nos casos $k > 0$, $k = 0$ e $k < 0$.

(b) (0,8 pts) Prove que a função f não é contínua no ponto $(0,0)$.

Dica para os itens (a1) e (a2): Para encontrar o conjunto de nível k, resolva a equação $f(x,y) = k$ (vai dar uma equação de segundo grau com relação ao variável y). Isole o y nessa equação para obter a definição explícita de conjunto de nível $k \neq 0$. Estude o caso $k = 0$ separadamente.

Dica para o item (b): Use o item (a1) ou (a2), observe por onde o conjunto de nível está passando, use isso para mostrar que f não tem limite no ponto $(0,0)$.

Questão 5 (2,0 pts + 1,0 bônus)**.** Considere a função $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definido por:

$$H(r,\theta) = F\big(x(r,\theta), y(r,\theta)\big),$$

onde $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função contínua de duas variáveis e

$$x(r,\theta) = r\cos\theta \quad \text{e} \quad y(r,\theta) = r \operatorname{sen}\theta.$$

Sabendo que:

$$\nabla F(1,\sqrt{3}) = (4,6), \qquad \nabla F(\sqrt{2},\sqrt{2}) = (8,10), \qquad \nabla F(1,-\sqrt{3}) = (-2,-2).$$

(a) (1,0 pts) Calcule o vetor gradiente $\nabla H(r,\theta)$ da função H no ponto $\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$ e escreva a expressão matricial da transformação linear que define a derivada $H'\left(2,\frac{\pi}{4}\right)$ nesse ponto.

(b) (0,5 pts) Escreva a equação do plano tangente ao gráfico da função H no ponto $\left(2, \frac{\pi}{4}, H\left(2,\frac{\pi}{4}\right)\right)$, sabendo que $H\left(2,\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

(c) (0,5 pts) Use a derivada definido no item (a) para estimar o valor de $H(2.001, 0.785)$.

(d) (1,0 bônus) Sabendo que:

$$F_{xy}(x,y) = F_{yx}(x,y) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y)$$

para qualquer $(x,y) \in \left\{(1,\sqrt{3}), (1,-\sqrt{3}), (\sqrt{2},\sqrt{2})\right\}$. Calcule o valor de $\dfrac{\partial^2 H}{\partial\theta\,\partial r}\left(2,\frac{\pi}{4}\right)$.

Dica para os itens (a) e (d): Usar a Regra da Cadeia, substituir os valores das derivadas de acordo com os dados acima e calcular os valores pedidos. Se você substituiu os valores e aplicou as fórmulas corretamente, o restante é uma conta direta.

Dica para o item (c): Observe que $\frac{\pi}{4} \approx 0.785$.

Boa Prova!